CONEXIONES MATEMÁTICAS QUE ESTABLECEN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO AL RESOLVER TAREAS DE DERIVADA Y DE INTEGRAL EN EL REGISTRO ALGEBRAICO

Javier García-García, Crisólogo Dolores-Flores
Universidad Autónoma de Guerrero (México)
libra_r75@hotmail.com, cdolores2@gmail.com

RESUMEN: El presente escrito tiene por objetivo identificar las conexiones matemáticas que establecen tres estudiantes de bachillerato cuando resuelven tareas de la derivada y la integral en el registro algebraico. Para la colecta de datos realizamos entrevistas basadas en tareas, previamente validadas, y utilizamos un marco conceptual para caracterizar las conexiones matemáticas identificadas. Los resultados dan cuenta que emergen dos tipos de conexiones intramatemáticas: procedimental y el uso de representaciones diferentes. Asimismo, identificamos cinco temas: la derivada de $f(x) = ax^n$ es $f'(x) = anx^{n-1}$, la integral de $f'(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$, en una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma, el resultado de una integral definida significa área bajo una curva y, la derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones.

Palabras clave: Derivada, Integral, Conexiones Matemáticas, Bachillerato

ABSTRACT: This paper aims to identify the mathematical connections established by three high- school students when they solve tasks of the derivative and the integral in the algebraic register. To collect data we perform task-based interviews, previously validated, and use a conceptual framework to characterize the identified mathematical connections. The outcomes show that two types of intra-mathematical connections emerge: the one, and the use of different representations. We also identified five topics: the derivative of $\mathrm{f(x) = ax^n}$ is$\mathrm{f'(x) = anx^{n-1}}$, the integral $\mathrm{f'(x) = ax^n}$ is $\int \mathrm{ax^n dx} = \frac{\mathrm{ax^{n+1}}}{\mathrm{n+1}} + \mathrm{C}$ in an integral defined to the upper limit evaluated in the anti-derivative of f '(x) is subtracted the lower limit evaluated in it, The result of a definite integral means area under a curve, and the derivative of the integral of a function (or the other way around) is obtained by following the hierarchy of operations.

Key words: Derivative, Integral, Mathematical Connections, high school

Introducción

El currículum de bachillerato mexicano correspondiente a los cursos de Cálculo Diferencial e Integral plantea que en la Educación Media Superior se "debe dejar de lado la memorización sin sentido de temas desarticulados y la adquisición de habilidades relativamente mecánicas (DGB, 2013a, 2013b, p. 6)". En oposición a ello, proponen que se debe promover el trabajo interdisciplinario, similar a la forma en que se presentan los hechos en la vida cotidiana del estudiante. Por tanto, las conexiones son una demanda actual de los currículums tanto mexicano, como de otros países como: Sudáfrica (Mwakapenda, 2008) y Estados Unidos de Norteamérica (NCTM, 2014). Es en este último país donde empezaron a tomar relevancia desde que fueron incorporadas como un estándar dentro del currículum de la matemática escolar.

Las conexiones matemáticas son importantes porque permiten ver a las matemáticas como un campo integrado, y no como una colección de partes separadas (Evitts, 2004; Mwakapenda, 2008; Jaijan y Loipha, 2012). Ayudan a establecer relaciones entre las matemáticas y otras asignaturas disciplinares o con situaciones de la vida real. Deben ser desarrolladas en los estudiantes porque les permitiría mejorar su compresión matemática (Mhlolo, 2012; Eli, Mohr-Schroeder y Lee, 2011). Por ello, asumimos que el aprendizaje de las matemáticas está fuertemente ligado con las conexiones que los alumnos logren establecer entre nociones, conceptos, procedimientos y representaciones.

La literatura en nuestro campo de estudio, la Matemática Educativa, da cuenta de diversos estudios que se han realizado tomando como objeto a las conexiones matemáticas (Yoon, Dreyfus & Thomas, 2010; Haciomeroglu, Aspinwall & Presmeg, 2010; Lockwood, 2011; Mhlolo, Venkat & Schäfer, 2012; Jaijan & Loipha, 2012; Moon, Brenner, Jacob & Okamoto, 2013; Eli, Mohr-Schroeder & Lee, 2011). Por ejemplo, Mhlolo et al. (2012) y Jaijan & Loipha (2012) exploran la naturaleza y la calidad de las conexiones que promueven los profesores en álgebra; Moon et al. (2013) investigan las dificultades cognitivas de los futuros profesores cuando realizan conexiones entre representaciones; Eli et al. (2011) buscan las conexiones que los profesores hacen en la resolución de problemas en Geometría; Lockwood (2011) explora las conexiones hechas por los estudiantes universitarios en la resolución de problemas de conteo.

Por otro lado, identificamos que dos de los conceptos claves en Cálculo son la derivada y la integral. La conexión entre estos problemas como procesos inversos la descubrió Isaac Barrow (1630-1677) [Stewart, 2010]; en el plano matemático, esa relación está descrita por el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Sin embargo, cuando son objeto de enseñanza-aprendizaje es posible que se haga o no evidente esa conexión, sobre todo cuando el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral se estudian de manera separada en bachillerato en México, incluso en el nivel superior (en algunos programas educativos).

Por lo expuesto anteriormente, identificamos la importancia de estudiar las conexiones matemáticas, por un lado, y los dos conceptos claves del Cálculo, por el otro; por considerar que son un contenido matemático que se aborda desde el bachillerato y que se formaliza en el nivel superior en México. En este escrito damos respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿qué conexiones matemáticas establecen tres estudiantes de bachillerato cuando resuelven tareas de la derivada y la integral en el registro algebraico? Y como objetivo, caracterizar esas conexiones que los estudiantes establecen.

Marco conceptual

Businskas (2008) concibe a las conexiones matemáticas como aquellas relaciones sobre la base de las cuales está estructurada la matemática y son independientes del estudiante y, por otro lado, como las relaciones a través de las cuales los procesos del pensamiento construyen la matemática. Por su parte, Evitts (2004) señala que el conocimiento conectado se puede describir en términos de su construcción personal y significado, la multiplicidad de vínculos entre los conceptos y procedimientos, y el poder derivado de conocer las conexiones. De este modo los conceptos quedan constituidos por una red de definiciones y de propiedades que los relacionan (De Gamboa & Figueiras, 2014), que pueden utilizarse para vincular los temas matemáticos o bien como una relación causal, lógica o de interdependencia entre dos entidades matemáticas.

Se pueden hacer conexiones con el mundo cotidiano, con los conocimientos previos, con los contextos familiares dentro y fuera de la escuela, con diversos temas matemáticos, con otras disciplinas, con el pasado y el futuro (Begg, 2001; Presmeg, 2006; NTCM, 2014). Las conexiones matemáticas también permiten identificar y establecer relaciones entre los problemas, en cuanto a lenguaje matemático y registro de representación semiótica se refiere, y reconocer los contextos (conceptual y global) de los problemas, de manera que permita una influencia mutua dando lugar a respuestas coherentes asociadas a los problemas (Garbín, 2005).

En este trabajo entendemos a las conexiones matemáticas como un proceso cognitivo mediante el cual una persona relaciona o asocia dos o más ideas, conceptos, definiciones, teoremas, procedimientos, representaciones y significados entre sí, con otras disciplinas o con la vida real. Éstas son funcionales en el momento de resolver situaciones intramatemáticas (que se da entre distintos dominios de las matemáticas) y extramatemáticas (emerge entre las matemáticas y otras disciplinas o con la vida real); la forma de identificarlas es mediante los argumentos verbales o mímicos que utiliza al estudiante cuando resuelve actividades concretas.

Para estudiar las conexiones matemáticas elaboramos un marco teórico preliminar, que por cuestiones de espacio no presentamos, pero que se puede consultan en García (2016). Este modelo considera dos tipos de conexiones generales: extramatemáticas e intramatemáticas. Dentro de la primera, se identifica la conexión de modelado y dentro de las intramatemáticas, reconocemos la conexión entre conceptos matemáticos, reversibilidad, uso de diferentes representaciones, la inclusión, la generalización y la procedimental. Este marco preliminar lo elaboramos considerando algunos resultados de Evitts (2004) y Businskas (2008), pero ampliado para los propósitos de un estudio más general, actualmente en curso.

Metodología

Para la colecta de datos utilizamos las entrevistas basadas en tareas, que de acuerdo a Goldin (2000), involucra mínimamente un sujeto y un entrevistador quienes interactúan en relación con uno o más tareas presentado al sujeto en una forma pre planeada. Según Assad (2015), el protocolo de la entrevista puede estar estructurado con indicaciones y las respuestas previstas de antemano por el entrevistador, o puede ser semi-estructurada, lo que permite que el entrevistador juzgue la respuesta adecuada al razonamiento matemático de los estudiantes. En este estudio, el protocolo de la entrevista fue semi-estructurada.

Los datos que se reportan en este escrito corresponden a las producciones de tres estudiantes (de 25 participantes en el proyecto general) de bachillerato del estado de Guerrero, México, referente al registro algebraico. La entrevista tuvo una duración promedio de 40 minutos, se desarrolló en un día hábil y con la participación voluntaria de los estudiantes. El único requisito fue éstos hayan cursado y aprobado previamente Cálculo (Diferencial e Integral).

Para analizar los datos utilizamos análisis temático (Braun & Clarke, 2006). El objetivo de un análisis temático es identificar patrones de significados (temas) a través de un conjunto de datos proporcionados por las respuestas a la pregunta de investigación planteada. Los patrones se identifican a través de un proceso riguroso de familiarización de datos, codificación de datos, el desarrollo del tema y revisión.

Análisis de los datos

Dado que un tema representa cierto nivel de *patrón* respuesta o significado dentro del conjunto de datos (Braun y Clarke, 2006), para nuestros propósitos lo asociamos a un patrón en las respuestas de los tres estudiantes (Ali, Juan y María), cuyas producciones analizamos para este estudio. Es decir, que las conexiones matemáticas identificadas fueran comunes en los tres. Esta convención, nos permitió identificar un total de cinco temas. Los cuales se presentan enseguida:

1. La derivada de $f(x) = ax^n$ es $f'(x) = anx^{n-1}$

Esta conexión indica que los estudiantes realizan una conexión procedimental para hallar la derivada de la función algebraica $f(x) = 3x^2$ proporcionada a ellos. Se les pidió calcular la derivada y al mismo tiempo justificar el procedimiento seguido si es que no lo declaraban (ver extracto de la entrevista a Ali):

> Entrevistador: ¿Puedes calcular la derivada de esta expresión (se le señala la función $f(x) = 3x^2$)?
>
> Ali: Sí (hace los cálculos)
>
> Entrevistador: ¿Qué hiciste para obtener la derivada?

Ali: […] multipliqué el 3 por 2 y resulta 6 como coeficiente y… al cuadrado de la equis se le resta la unidad; nos queda equis a la uno.

Si bien Ali no declara explícitamente la fórmula, su argumento permite inferir el uso de ella.

2. La integral de $f'(x) = ax^n$ es $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$

Este tema también implica una conexión procedimental. Los tres estudiantes, para encontrar la antiderivada de la función $f'(x) = 6x$ recurren a la fórmula para integrar una función algebraica polinomial (ver extracto de la entrevista). Ninguno de ellos percibe que la antiderivada es la función que se les pidió derivar previamente. En este caso, parecen no percibir la reversibilidad entre la derivada y la integral.

Entrevistador: ¿Puedes encontrar la integral de la derivada que obtuviste anteriormente? (se le indica $f'(x) = 3x^2$)

Ali: [Hace el cálculo correspondiente]

Entrevistador: ¿Podrías explicarme qué hiciste para hallar la respuesta?

Ali: para empezar, le agregué el diferencial, después este seis [señala el 6 de 6*x*] lo podemos sacar [del símbolo de integral] como coeficiente que es; después se aplica una regla que es cuando equis está elevada a cierta potencia para integrarlo se le suma la unidad al exponente que tiene [la variable], en este caso es uno más no y resulta equis cuadrada y de ahí, es dividido entre el mismo exponente que es uno más uno. Por eso resultó equis cuadrada sobre dos, pero como teníamos el seis, se multiplica y en este caso seis sobre dos es tres y, equis cuadrada y se le agrega la constante de integración.

3. En una integral definida al límite superior evaluado en la antiderivada de $f'(x)$ se le resta el límite inferior evaluado en la misma

Esta conexión es la manifestación del uso del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) intrínsecamente relacionado con el siguiente tema. En particular, los estudiantes utilizan el hecho de que si $f: [a, b] \to R$ integrable es continua en el intervalo [*a*, b] y g: [*a*, b]→R, es una antiderivada de *f*, es decir satisface $g'(x) = f(x)$, entonces: $\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a)$. Al igual que los temas anteriores, este es de tipo procedimental.

4. El resultado de una integral definida significa área bajo una curva

Los estudiantes al calcular $\int_1^x 6x\, dx$ y encontrar como resultado $3x^2 - 3$; logran asociar esto con el área bajo una curva, desde *x* = 1 hasta un valor de *x* “desconocido” (ver extracto de la entrevista a María).

Entrevistador: ¿puedes desarrollar este cálculo (se le indica $\int_1^x 6xdx$)?

María: (después de utilizar el TFC escribe como resultado $3x^2 - 3$)

Entrevistador: ¿qué crees que signifique ese resultado?

María: el área que se encuentra entre este intervalo (señala los límites 1 y x)

Entrevistador: ¿bajo qué función?

María: bajo esta (señala la función integrando: $f(x) = 6x$)

Esta asociación entre un resultado algebraico con uno geométrico; implica una conexión del tipo: representaciones diferentes. Este tema, así como el 3, dan cuenta del uso parcial del TFC.

5. La derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones

Este tema da cuenta que los tres estudiantes sólo conciben al TFC en un sentido, pero no para reconocer la reversibilidad entre la derivada y la integral. Por ello, cuando se les pide resolver $\frac{d}{dx}[\int 3x^2 dx]$ y $\int \left[\frac{d}{dx} 3x^2\right] dx$ optan por desarrollar primero la operación dentro del corchete y posteriormente la operación indicada fuera de ella (ver extracto de la entrevista a Juan). Esto provoca que en el primer caso obtengan que el resultado es $3x^2$, pero en el segundo $3x^2 + C$. Esta conexión también es del tipo procedimental.

Entrevistador: […] ahí se te indica otra operación ¿entiendes la simbología (se le señala $\frac{d}{dx}[\int 3x^2 dx]$)?

Juan: tengo que… primero tendría que integrar esto (señala $3x^2$) y el resultado lo tendría que derivar (señala el d/dx)

Entrevistador: bien. ¿Lo puedes resolver?

Juan: sí (integra y luego deriva correctamente)

Entrevistador: ¿crees que exista otra forma de encontrar el resultado sin necesidad de realizar esas operaciones?

Juan: no sé, primero tendría que hacer la operación que está indicada entre los corchetes, para después hacer la operación que está afuera

Entrevistador: enseguida se presenta otra operación (se le señala $\int \left[\frac{d}{dx} 3x^2\right] dx$) ¿qué te indica?

Juan: que tengo que hacer lo que está entre corchetes y después sacar su integral

Entrevistador: ok. ¿Puedes encontrar el resultado?

Juan: (deriva y luego integra correctamente. Su resultado es$3x^2 + C$). Creo que sería ese el resultado

Juan refiere que ambas operaciones son distintas porque el orden en que se realizan la deriva y la integral es diferente en cada caso, por ello, en la segunda el resultado lleva una constante de integración.

Discusión y conclusión

En este escrito se reportó las conexiones que son comunes a tres estudiantes: Ali, Juan y María; quienes de manera individual mostraron realizar 16 conexiones cada uno, pero que en común sólo presentan 5. Los resultados de los tres estudiantes, indica que la conexión más común es la procedimental y en menor grado, se presenta la conexión del tipo representaciones diferentes. Estos resultados son producto del registro donde se puso énfasis en este análisis, a saber, el algebraico. Estos datos son consistentes con lo reportado por Hong & Thomas (2015), en el sentido de que hay persistencia en el uso del símbolo algebraico. Por otra parte, los resultados de los tres estudiantes dan cuenta del uso del TFC, pero sólo en un sentido, pero no para dar cuenta que perciben la reversibilidad de la derivada y la integral, la cual se cumple para las funciones algebraicas polinomiales.

Los dos tipos de conexiones identificadas son de tipo intramatemáticas porque emergen al interior de la matemática. Estas se caracterizan como sigue:

- *Representaciones diferentes:* pueden ser de dos tipos: representaciones alternas o equivalentes. A es una representación alterna de B, si ambas están expresadas en dos formas diferentes (verbal-algebraica, algebraica-geométrica, verbal-geométrica, etc.). En cambio, A es una representación equivalente de B cuando ambas están expresadas en dos formas diferentes, pero dentro de una misma representación (algebraica-algebraica, verbal-verbal, etc.) [Businskas, 2008]. En el estudio, sólo se identificó el uso de las representaciones alternas (tema 4).
- *Conexión procedimental*: A es un procedimiento usado cuando trabajamos con un objeto B (Businskas, 2008). Por ejemplo, utilizar la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ es un procedimiento para encontrar la pendiente de una recta. Asimismo, una gráfica puede ser utilizada para identificar puntos máximos, mínimos, concavidades, punto de inflexión, etc. En nuestro caso, esta conexión se hizo patente en los temas 1, 2, 3 y 5.

Los resultados indican que las diversas conexiones matemáticas que un estudiante establece le permiten llegar a la solución de la actividad propuesta. Asimismo, algunas de ellas permiten o inhiben la comprensión de otros conceptos, por ejemplo, el tema “la derivada de la integral de una función (o viceversa) se obtiene siguiendo la jerarquía de las operaciones” no permite que los estudiantes establezcan y utilicen la reversibilidad entre la derivada y la integral en otros contextos. Finalmente, consideramos que es importante seguir profundizando en el estudio de las conexiones matemáticas con poblaciones más amplias (tal como lo estamos haciendo y que reportaremos en estudios posteriores).

Referencias bibliográficas

Assad, D. A. (2015). Task-Based Interviews in Mathematics: Understanding Student Strategies and Representations through Problem Solving. *International Journal of Education and Social Science, 2*(1), 17-26.

Begg, A. (2001). Ethnomathematics: Why, and What Else? *ZDM, 33*(3), 71-74.

Braun, V. & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology, 3*(2), 77–101.

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Unpublished doctoral dissertation. Faculty of Education-Simon Fraser University. Canada.

De Gamboa, G., & Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

DGB. (2013a). *Cálculo diferencial.* Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_5sem/calculo-diferencial.pdf

DGB. (2013b). *Cálculo Integral.* Recuperado el 10 de junio de 2015 de http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01-programasdeestudio/cfp_6sem/CALCULO_INTEGRAL.pdf

Eli, J., Mohr-Schroeder, M., & Lee, C. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal*, *23*(3), 297-319.

Evitts, T. (2004). *Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula.* Unpublished doctoral dissertation. Pennsylvania State University College of Education. EE.UU.

Garbín, S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(2), 169-193.

García, J. (2016). *Conexión entre las ideas centrales del Cálculo en bachillerato.* Memoria predoctoral no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. pp. 517-545). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Haciomeroglu, E., Aspinwall, L., & Presmeg, N. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 152-176.

Hong, Y., & Thomas, M. (2015). Graphical construction of a local perspective on differentiation and integration. *Mathematics Education Research Journal*, *27*(2), 183-200.

Jaijan, W., & Loipha, S. (2012). Making Mathematical Connections with Transformations Using Open Approach. *HRD Journal, 3*(1), 91-100.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78,* 307–322.

Mhlolo, M. (2012). Mathematical connections of a higher cognitive level: A tool we may use to identify these in practice. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(2), 176-191.

Mhlolo, M., Venkat, H., y Schäfer, M. (2012). The nature and quality of the mathematical connections teachers make. *Pythagoras, 33*(1), 1-9. Recuperado de http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i1.22

Moon, K., Brenner, M., Jacob, B., & Okamoto, Y. (2013). Prospective secondary mathematics teachers' understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(3), 201-227.

Mwakapenda, W. (2008). Understanding connections in the school mathematics curriculum. *South African Journal of Education, 28*, 189–202.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 163–182.

Stewart, J. (2010). *Cálculo de una variable: Conceptos y Contextos.* México: CENGAGE Learning.

Yoon, C., Dreyfus, T., & Thomas, M. (2010). How high is the tramping track? Mathematising and applying in a calculus model-eliciting activity. *Mathematics Education Research Journal, 22*(2), 141-157.